IAHR **AIIH**

XXV CONGRESO LATINOAMERICANO DE HIDRÁULICA

SANTIAGO, CHILE, AGOSTO 2014

ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE LA PRECIPITACIÓN EMPLEANDO LA TRANSFORMADA DE LEGENDRE

López-Lambraño, Alvaro[1,4]; Fuentes, Carlos[2]; López-Ramos, Alvaro[3]; Pliego-Díaz, Máximo[5]

[1]Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño, Universidad Autónoma de Baja California. Km. 103 carretera Tijuana – Ensenada, C.P. 22860, Ensenada, Baja California, México.

[2]Facultad de Ingeniería. Universidad Autónoma de Querétaro. Cerro de las Campanas. 76010 Santiago de Querétaro, Qro., México.

[3]Escuela de Ingenierías y Arquitectura. Facultad de Ingeniería Civil. Universidad Pontificia Bolivariana. Montería, Km 8 vía a Cereté, Córdoba, Colombia.

[4]Hidrus S.A de CV. Querétaro, México

[5]Instituto Tecnológico de Querétaro. General Mariano Escobedo, esquina tecnológico s/n. 7600 Santiago de Querétaro, Qro., México.

altoti@gmail.com, cfuentes@uaq.mx, alopezramos@hotmail.com, mpliego@mail.itq.edu.mx

RESUMEN:

Se realiza el análisis de la estructura en diferentes escalas de tiempo de la precipitación utilizando la transformada de Legendre, para así obtener las medidas multifractales de dichas variables. Para el análisis de las variables climatológicas en estudio, se emplea el método Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MFDFA) a partir de series de tiempo con resoluciones anuales, mensuales y diarias para 50 años de registro. En este caso de estudio, se define una función de partición y a partir de ella, se construye el correspondiente formalismo multifractal que permite analizar la regularidad Hölder de funciones que integran dichas medidas. A partir de la transformada de Legendre, fue posible el análisis estructural de la variable precipitación mediante la obtención del espectro de singularidades de las mismas. El análisis multifractal se muestra como una herramienta adecuada y eficiente para caracterizar las serie de precipitación en el estudio del cambio climático. Los espectros multifractales obtenidos son simétricos lo que indica homogeneidad de la variable en estudio.

ABSTRACT

In this work the Hurst exponent, which can characterize correlation and persistence in time series, will be obtained by using the Multifractal Analysis. Data series of precipitation will be studied. Furthermore, the multifractality of such series will be analized applying the Multifractal Detrended Fluctuation Analysis method.

PALABRAS CLAVE: Análisis multifractal, leyes potenciales, teoría de escala

INTRODUCCIÓN

La precipitación exhiben una alta variabilidad tanto en el tiempo como en el espacio. La mayor parte de los estudios se han orientado hacia el entendimiento de todos los mecanismos físicos que generan dichas variables y a la incorporación de su dinámica en los modelos estocásticos; por lo tanto la alta variabilidad de la precipitación y temperatura en consideración ha inducido al estudio de sus diferentes escalas de forma independiente, ocasionando un uso restringido de los citados modelos. Sin embargo, la mezcla de escalas es frecuente en hidrología, donde suele trabajarse con datos pertenecientes a pequeñas escalas temporales para obtener estimaciones correspondientes a escalas temporales más elevadas.

Mandelbrot (1967) introduce el concepto de fractal en términos de estadística autosimilar, el término radica en que la forma de un objeto no define su tamaño, definiendo los fractales como objetos que poseen una apariencia similar cuando se observan en diferentes escalas poseen detalles a escalas pequeñas arbitrarias, por lo que se tornan demasiado complejas como para estudiarse por la geometría Euclidiana. La geometría fractal es caracterizada por la prevalencia de variables aleatorias distribuidas hiperbólicamente, para la cual $Pr\ (U>u)\ \alpha\ u\text{-}\alpha$, donde Pr es la probabilidad de que el valor de la variable exceda u, y α es un exponente positivo. Los fractales permiten generar estructuras bastante complejas por medio de agrupaciones, por lo que pueden aplicarse a prácticamente cualquier estudio deseado. (Lovejoy y Mandelbrot, 1984).

La teoría de los fractales, y su posterior evolución hacia la teoría de los multifractales, estudia matemáticamente esta invarianza de escala, y se utiliza para describir fenómenos muy complejos con simples leyes potenciales caracterizadas por sus exponentes. Los multifractales describen procesos para los que se necesitan múltiples exponentes de escala.

Asimismo, el análisis multifractal puede servir como una herramienta de validación de modelos estocásticos de la precipitación mediante la comparación del espectro de las dimensiones de las series observadas y las series sintéticas generadas (López-Lambraño, 2012).

La multifractalidad como teoría para completar la descripción de las series temporales de variables hidrológicas, ha sido una teoría ampliamente estudiada en las últimas décadas (e.g. Schertzer y Lovejoy, 1987; Ladoy et al., 1993; Fraedrich y Larnder, 1993; Over y Gupta, 1994; Svensson et al., 1996; Tessier et al., 1993, 1996; de Lima y Grasman, 1999; Kiely e Ivanova, 1999; Kantelhardt et al., 2006).

Este trabajo tiene como principal objetivo el análisis de la estructura en diferentes escalas de tiempo de la precipitación utilizando la transformada de Legendre para así obtener las medidas multifractales de las variables en estudio.

TEORÍA

Se introducen a continuación algunas definiciones fundamentales de la Geometría Fractal siguiendo a Falconer (1990):

Consideremos que tenemos una medida μ con un soporte C. Podemos recubrir a este soporte con una familia de conjuntos formados por $N(s)$ cajas $Bi(s)$ cada una de lado s . La función de partición asociada con la medida y con la cobertura se define como:

$$Z(q,s)=\sum_{i=1}^{N(s)}\mu_i^q(s) \qquad [1]$$

donde q es un número real y $\mu_i^q(s)$ es una función de $B_i(s)$.

Admitiendo que para $s \to 0^+$ se tiene la siguiente relación exponencial,

$$Z(q,s) \sim s^{\tau(q)} \qquad [2]$$

A partir de la expresión anterior, el formalismo multifractal usa la transformada de Legendre para relacionar el exponente de escala $\tau(q)$ con el espectro multifractal. Suponiendo que $\tau(q)$ es una función de concavidad negativa, la transformada de Legendre de la función $-\tau(q)$ es

$$\inf\left\{-\tau(q)+q\alpha\right\} \qquad [3]$$

Y se puede establecer que

$$d(\alpha)=\inf_{q\in R}\left\{-\tau(q)+q\alpha\right\} \qquad [4]$$

Dado, derivando $-\tau(q)+q\alpha$,se tiene que el mínimo se alcanza en un único q y esto sucede cuando

$$\alpha=\tau'(q) \qquad [5]$$

así mismo, se estima

$$d(\alpha)=q\alpha-\tau(q) \qquad [6]$$

donde α es la intensidad de la singularidad o el exponente de Hölder y $d(\alpha)$ es el espectro multifractal.

MATERIALES Y MÉTODOS

Se utilizan para el análisis los datos de precipitación anual, mensual y diaria registrados en la estación climatológica Presa Centenario, dicha estación se encuentra ubicada en el estado de Querétaro – México, entre las coordenadas 20° 01' 16" y 21° 35' 38"   Latitud Norte99° 00' 46" y 100° 35' 46" Longitud Oeste.

En este trabajo se aplica el método Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MFDFA) a una serie de precipitaciones de 50 años de registro.

El método MFDFA (Movahed et al., 2006) involucra la transformada de Legendre [4] para la obtención del espectro multifractal de la medida.

Este método aplica para el caso de medidas μ de Borel no negativas, singulares y de soporte acotado. Esto incluye el caso de aquellas cuyo soporte es un conjunto de Cantor generalizado. En estos casos, se puede definir una función de partición cuya naturaleza depende del método, y a partir de ella, construir el correspondiente formalismo multifractal que permite analizar la regularidad Hölder de funciones que integran dichas medidas.

La estructura de evento de lluvia que se utiliza para el análisis, se plantea de tal forma que un evento de lluvia (i) se define como una secuencia de cantidades no nulas de lluvia, y su tamaño es representado por la columna de agua acumulada desde el inicio hasta el momento en que finaliza la precipitación; por lo tanto cada valor que conforma la serie de tiempo de precipitaciones, constituye un evento acumulado de lluvia.

Finalmente a partir de la ecuaciones [3-6] se desarrolla el formalismo multifractal que permite obtener los espectros de singularidades de la precipitación.

RESULTADOS

Se realiza una aplicación de la técnica MF-DFA sobre las series de precipitación. Empleando la transformada de Legendre se obtiene el espectro de singularidades para comprobar la naturaleza multifractal de las series temporales de precipitación. Para ello, se define el momento estadístico "q".

Para un $q = 10$ se determina el perfil de la serie; con dicho perfil definido, se procede a realizar el análisis de fluctuaciones para $q = 10$ y $q = 6$, como se muestra en la figura 1. Hay que resaltar que en este caso el análisis de fluctuaciones es dado a partir de un número de 100 segmentos o ventanas.

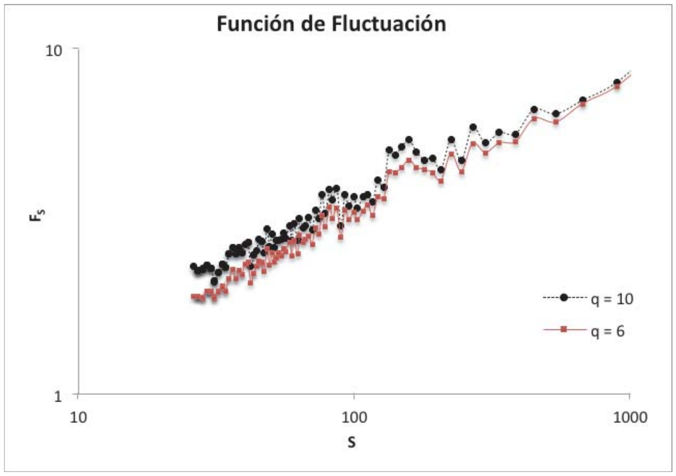

Figura. 1- Representación log-log para la función de fluctuación de datos de precipitación para un q = 10 y q = 6.

La función de fluctuaciones de la figura anterior representa la evolución de la función de fluctuaciones a partir de un número determinado de ventanas para el análisis, así mismo en dicha gráfica se observan varios cambios de pendiente y oscilaciones. Los cambios de pendiente nos dicen que la señal exhibe múltiples escalamientos; es decir, es de naturaleza multifractal.

A partir del formalismo planteado en las ecuaciones [3-6] se puede determinar el exponente de Hurst generalizado para valores de q, en este caso entre (-10,10) y (-6,6).

De acuerdo a la relación entre el exponente de Hurst y $h(q)$, i.e. $h(q=10)-1=H$, se podría encontrar el valor del exponente de Hurst igual a 0.38, la dimensión fractal puede ser obtenida como $D_f=(2-H)=1.62$; para $h(q=6)-1=H$, se tiene un valor del exponente de Hurst igual a 0.42 y la dimensión fractal es igual a 1.58.

A continuación se muestran las funciones $h(q)$ y $\tau(q)$ para los momentos definidos y posteriormente se obtiene la función de escalado de momentos $\tau(q)$, en donde se observa un comportamiento multifractal de las series de precipitación por la fuerte dependencia del exponente generalizado q y $\tau(q)$. Ver figura 2 y 3. Tambien se puede notar que la curva $\tau(q)$ es convexa, siendo esto un indicativo de multifractalidad.

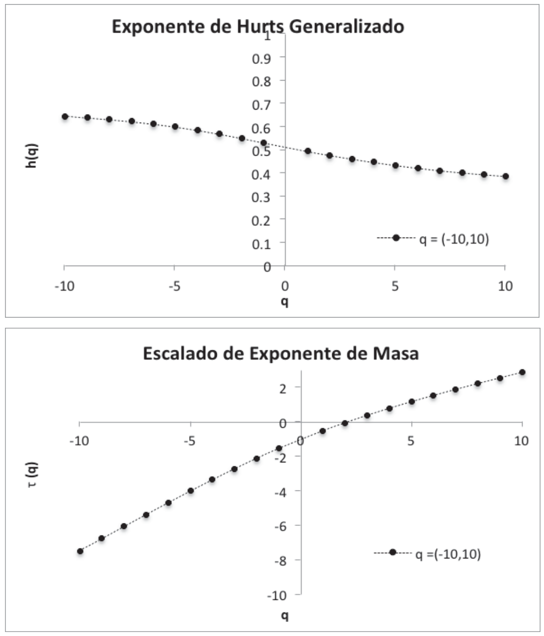

Figura 2.- Función $h(q)$ y $\tau(q)$ obtenida para la precipitación y un momento q = 10

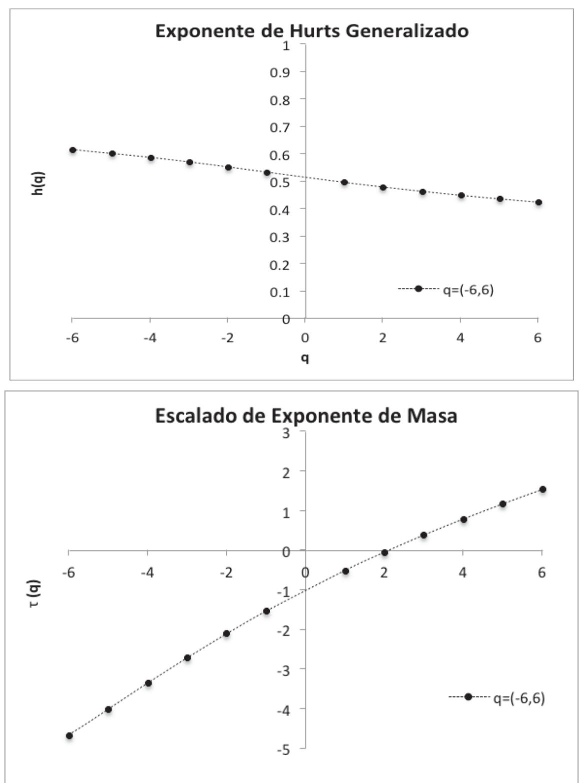

Figura 3.- Función $h(q)$ y $\tau(q)$ obtenida para la temperatura y un momento q = 6

A partir de la funciones $\tau(q)$ obtenidas con anterioridad y aplicando la ecuación [4] correspodiente a la transformada de Legendre, se genera el espectro multifractal de la precipitación para los momentos definidos. Ver figura 4 y 5.

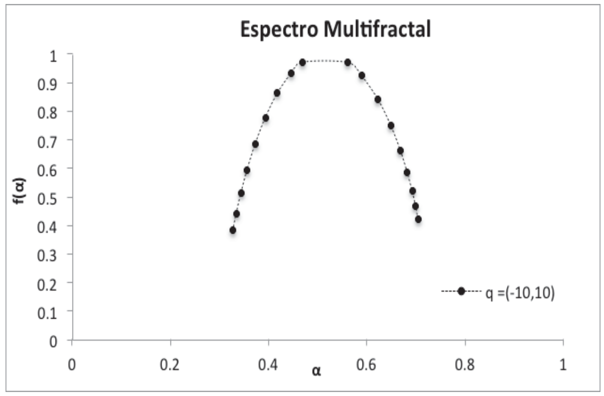

Figura 4.- Espectro multifractal de la precipitación a partir de la Función $\tau(q)$ y para valores de q = -10, 10

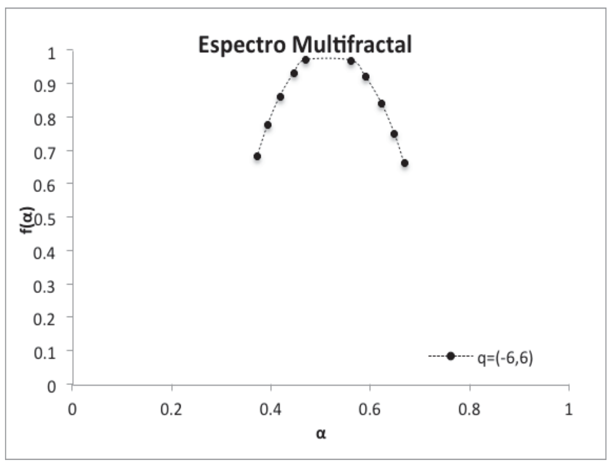

Figura 5.- Espectro multifractal de la precipitación a partir de la Función $\tau(q)$ y para valores de q = -6, 6

Los espectros multifractales presentados en las figuras anteriores, representan una función cóncava, las diferentes partes de la estructura están caracterizadas por diferentes valores de (α) , lo que lleva a la existencia del espectro multifractal $f(\alpha)$.

También es importante mencionar que el ancho correspondiente a cada espectro nos proporciona información sobre la variabilidad de la precipitación.

Cuando la acumulación de puntos en los extremos es de forma concentrada, puede indicar la existencia de valores extremos lejanos de la media, situación que puede ser presentada para ordenes mayores para rangos de *q*; por otro lado cuando una de las ramas del espectro multifractal es ligeramente más corta que otra, es un indicativo de valores homogéneos.

CONCLUSIONES

A partir de la transformada de Legendre, fue posible el análisis estructural de la precipitación, mediante la obtención del espectro de singularidades de la precipitación. Con respecto al análisis multifractal se ha mostrado como una herramienta adecuada y eficiente para caracterizar la serie en estudio. Los espectros multifractales obtenidos en la estación climatológica Presa Centenario son simétricos debido a que presentan una distribución de valores de (α) y $f(\alpha)$ homogénea ya que sus ramas derechas e izquierdas son de longitudes similares.

Finalmente la teoría multifractal es una herramienta apropiada para el estudio del cambio climático debido a que la conceptualización de los posibles cambios de los momentos de la precipitación con el tiempo se pueden determinar, permitiendo la realización de inferencias sobre el comportamiento de dicha variable en una zona en particular.

REFERENCIAS

de Lima MIP, Grasman J. (1999). “Multifractal analysis of 15-min and daily rainfall from a semi-arid region in Portugal”. *Journal of Hydrology* 220: 1-11.

Falconer K J. (1990). “Fractal geometry: mathematical foundations and applications”. *John Wiley & Sons,* Chichester, England, 288 pp

Fraedrich K, Larnder C. (1993). “Scaling regimes of composite rainfall time series.” *Tellus Series A-Dynamic Meteorology and Oceanography* 45A: 289-298.

Kantelhardt JW, Koscielny-Bunde E, Rybski D, Braun P, Bunde A, Havlin S. (2006). “Long-term persistence and multifractality of precipitation and river runoff records”. *Journal of geophysical research-atmospheres* 111 (D1): Art. No. D01106.

Kiely G, Ivanova K. (1999). “Multifractal analysis of hourly precipitation”. *Physics and Chemistry of the Earth Part B-Hydrology Oceans and Atmosphere* 24: 781 786.

Ladoy P, Schmitt F, Schertzer D, Lovejoy S. (1993). “The multifractal temporal variability of Nimes rainfall data”. *Comptes Rendus del Academie des Sciences* Serie II 317(6): 775-782.

Lopez-Lambraño A. (2012). “Análisis multifractal y modelación de la precipitación”. Tesis doctoral, Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro, 211 pp

Lovejoy S, y Mandelbrot B. (1984) Tellus 37A, 209-232.

Mandelbrot B.B. (1967) *Science* 156, 636-638.

Movahed, MS, GR Jafari, F Ghasemi, S Rahvar, MRR Tabar. (2006). “Multifractal detrended fluctuation analysis of sunspot time series”. *Journal of Statistical Mechanics*: Theory and Experiment (02), P02003.

Schertzer D, Lovejoy S. (1987). “Physical modelling and analysis of rain and clouds by anisotropic scaling multiplicative processes”. *Journal of Geophysical Research Atmospheres* 92: 9693-9714.

Svensson C, Olsson J, Berndtsson R. (1996). “Multifractal properties of daily rainfall in two different climates”. *Water Resources Research* 32: 2463-2472.

Tessier Y, Lovejoy S, Schertzer D. (1993). “Universal multifractals in rain and clouds: theory and observations”. *Journal of Applied Meteorology*, 32, 223-250.

Over TM, Gupta VK. (1994). “Statistical analysis of mesoscale rainfall: dependence of a random cascade generator on large scaling forcing”. *Journal of Applyed Meteorology*, 33, 1526-1543.