VOLUMEN 22, 59-82
REVISTA ELECTRONICA EN INGENIERIA MECANICA
ISSN 1870-1264
© DMMITQ JUNIO 2013
QUERÉTARO, MÉXICO

UN MODELO CONCEPTUAL DEL COEFICIENTE DE PROPORCIONALIDAD EN LA LEY DE DARCY

[1] M. Pliego, [2] A. López-Lambraño, [3] A. Altmairano-Corro, [3] C. Fuentes.

[1] Departamento de Ciencias Básicas, Instituto Tecnológico de Querétaro, Querétaro, México.
[2] DIP-FI-UABC, Km. 103 Carretera Tijuana - Ensenada, Ensenada, Baja California, México.
[3] DIP-FI-UAQ, Centro Universitario, Cerro de las Campanas, Querétaro, México.

Autor Titular/Corresponding author E-mail:

Palabras clave: Porosidad areal, porosidad volumétrica, relación fractal área-volumen, factor de tortuosidad, probabilidad conjunta

Resumen. *A partir de la idea probabilista de Childs y Collis-George y mediante el formalismo de la geometra fractal, se deduce una justificación a las correcciones empricas aportadas a los modelos clásicos de la conductividad hidráulica (coeficiente de proporcionalidad de la ley de Darcy). Las relaciones entre los radios de poro y las caractersticas geométricas del medio poroso, se establecen a partir de los conceptos de la tortuosidad de las trayectorias del movimiento del agua y de la correlación entre los poros por donde circula. Estos conceptos tienen como base una relación entre el volumen total del medio poroso y la dimensión fractal del área superficial del suelo. Se introduce la hipótesis clásica relativa a los pesos de los radios en la resistencia ofrecida al movimiento del agua por el suelo. Las correcciones obtenidas a los modelos clásicos dependen del valor de la dimensión fractal de cada suelo.*

Abstract. *From Childs and Collis-George's probabilistic idea and through the fractal geometry formalism, it is derive a justification for empirical corrections made to the classical models of hydraulic conductivity (coefficient of proportionality in Darcy's law). The relationship between the pore radius and geometric characteristics of the porous medium are established from the concepts of the tortuosity in the movement paths of water and the correlation between the pore where it circulates. These concepts are based on a relationship between the total volume of the porous medium and the fractal dimension of the surface area of the soil. Classical hypothesis is introduced on the weights of the radii in the resistance offered to the movement of water through the ground. Corrections obtained classical models depend on the value of the fractal dimension of each soil.*

Key words: Areal porosity, volumetric porosity, fractal area-volume relationship, tortuosity factor, joint probability.

Recibido: Abril 2013

1. INTRODUCCIÓN

La penetración capilar de lquidos en los medios porosos ha sido de interés por largo tiempo, debido a sus numerosas aplicaciones en una variedad de campos tales como las ciencias del suelo, la recuperación de petróleo, la ingeniera qumica, y la farmacéutica ([1, 2, 3]). Es difcil, sin embargo, estudiar este proceso en medios porosos verdaderos, debido a su complejidad y la falta de medios para definir los parámetros estructurales locales. Por consiguiente, se han usados modelos simplificados, tanto para los estudios experimentales como también para los teóricos.

El modelo posiblemente más simple que ha sido estudiado es el de un capilar cilndrico recto (e.g., ([4])). Para tomar en cuenta algunas de las propiedades geométricas de los medios porosos, se han ideados modelos termodinámicos de capilares con secciones transversales no-uniformes ([1]). Estos modelos son capaces de describir los comportamientos esenciales de la histéresis, los cuáles son caractersticos de la penetración capilar en los medios porosos, a saber, la dependencia de las posiciones de equilibrio del lquido sobre la dirección de movimiento (imbibición o drenado). El citado fenómeno de histéresis es diferente de la histéresis del ángulo de contacto, lo cual puede ocurrir tanto en un sistema real, como también en capilares cilndricos simples. La caracterstica común entre los modelos mencionados es el intento por definir en detalle la geometra del medio poroso.

Los modelos existentes pueden ser clasificados en dos grupos de categoras: (a) un tipo de modelo de orden cero, el cual no considera detalles estructurales; (b) los modelos de alto orden, que se basan en formas especficas del poro, pero que están limitados a geometras simples. El objetivo final, obviamente, sera el de desarrollar un modelo de alto-orden de geometra complicada, pero esto no es sencillo. Es entonces de vital importancia el contar con modelos que den explicación, primero a la emergencia de la Ley de Darcy, partiendo de modelos microscópicos y luego desarrollar modelos, también microscópicos que den sustento a los modelos de la infiltración en el medio poroso.

2. MODELO CONCEPTUAL DE CONDUCTIVIDAD HIDRÁULICA

En el estudio de los acuferos, el medio poroso se considera saturado y en la ley de Darcy aparece la conductividad hidráulica a saturación ($\mathbf{K}_s$); debido a la variabilidad espacial de las propiedades del medio, este parámetro es a lo más una función de las coordenadas espaciales. En la zona vadoza el medio es no saturado, la conductividad hidráulica a parte de ser una función de las coordenadas espaciales es una función de la presión del agua, $\mathbf{K}(\psi)$; aunado a lo anterior en esta zona es necesario conocer la curva de retención de humedad del suelo, la cual relaciona el contenido volumétrico de agua con la presión del agua, $\theta(\psi)$. Las dos curvas $\theta(\psi)$ y $\mathbf{K}(\psi)$ son conocidas como las caractersticas hidrodinámicas del suelo y son de fundamental importancia para el estudio de las transferencias de masa y energa en el mismo, como en el estudio de los fenómenos de infiltración, drenaje, evaporación y la recarga de los acuferos.

En la literatura se ha establecido un modelo conceptual de la conductividad hidráulica basado en la ley de Poiseuille del flujo del agua en tubos capilares (e.g. [5, 6]). El modelo tiene la forma

$$\mathbf{K} = \mathbf{C}_\mathbf{f} \int_{\Omega} \left(\mathbf{R} / \mathbf{T} \right)^2 \mathbf{d}\omega \qquad (1)$$

donde Ω representa el dominio de los poros llenos de agua; $= \rho_w \mathbf{g} / \eta$ es la fluidez, ρ_w es la densidad del agua, η es el coeficiente de viscosidad dinámica del agua, $\mathbf{g}$ la aceleración gravitacional; $\mathbf{R}$ es el radio de poro; $\mathbf{C}_\mathbf{f}$ el coeficiente de forma adimensional, el cual toma en cuenta la forma irregular del permetro de los poros; si $\mathbf{R}$ se toma como el radio hidráulico, $\mathbf{C}_\mathbf{f}$ es llamado el coeficiente de Koseny; $\mathbf{T}$ es el factor de tortuosidad definido por $\mathbf{T} = \mathbf{dz}_\mathbf{f} / \mathbf{dz} \geq 1$, donde $\mathbf{z}$ es la trayectoria rectilnea de las partculas de agua en la dirección macroscópica del movimiento y $\mathbf{z}_\mathbf{f}$ es la trayectoria real de las partculas; ω es el área efectiva de flujo o porosidad areal parcial.

Fuentes y sus colaboradores ([6]) *han establecido una definición del área efectiva de flujo a partir de la idea probabilista de Childs y Collis-George* [7] *y de los conceptos de la geometra fractal*. Haciendo un corte perpendicular a la trayectoria macroscópica de flujo en el medio poroso se obtienen dos caras, las cuales son ubicadas en las posiciones $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ (Fig. ??); los radios de los poros en la cara de la posición $\mathbf{x}$ son denotados por $\mathbf{r}$ y los de la cara en la posición $\mathbf{y}$ por ρ. Una partcula de agua ubicada en un poro de la cara $\mathbf{x}$ puede continuar su trayectoria por el mismo poro capilar o cambiar a otro de igual o diferente tamaño. La modelación de estas posibilidades de cambio se puede realizar equivalentemente con la introducción de la probabilidad del encuentro de las caras en un punto intermedio $\mathbf{z}$.

Un corte en el suelo perpendicular a la dirección macroscópica de flujo. Los radios de los poros son caracterizados en cada cara por $\mathbf{r}$ y ρ.

Considerando que la función de densidad de porosidad volumétrica $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ es la misma en las dos secciones e iguales a la función densidad del área de flujo en cada sección, la probabilidad del intervalo que contiene $\mathbf{r}$ es precisamente igual al área representada por $\mathbf{d}\theta(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r})\mathbf{dr}$ y la probabilidad del intervalo que contiene a ρ sobre la otra sección es igual a $\mathbf{d}\theta(\rho) = \mathbf{f}(\rho)\mathbf{d}\rho$. La probabilidad de que los poros representados por estos intervalos se encuentren de una manera completamente aleatoria en una posición $\mathbf{z}$ es el producto de las dos probabilidades. El producto de las áreas elementales $\mathbf{d}\theta(\mathbf{r})$ y $\mathbf{d}\theta(\rho)$ representa el área común de flujo $\mathbf{d}\omega(\mathbf{r}, \rho) = \mathbf{d}\theta(\mathbf{r})\mathbf{d}\theta(\rho) = \mathbf{f}(\mathbf{r})\mathbf{drf}(\rho)\mathbf{d}\rho$; la integración de esta ecuación sobre todo el rango del radio de poro permite obtener el área común total de flujo como $\mu = \phi\phi = \phi^2$, donde μ representa la porosidad areal total y ϕ la porosidad volumétrica total.

El comportamiento de los suelos se encuentra entre el comportamiento de los suelos de Purcell y el de Childs y Collis-George, lo cual en términos probabilsticos significa que el modelo de Purcell existe una correlación completa entre las dos secciones, mientras que el de Childs y Collis-George una decorrelación completa. Generalmente el flujo del agua en el suelo hay una geometra del medio que determina el movimiento o una estructura jerarquizada en el suelo. Un comportamiento intermedio puede ser obtenido si el suelo es considerado como un objeto fractal ([6, 9, 8]). Para esto se utilizará la relación entre el área y el volumen de Mandelbrot.

2.1 El concepto de tortuosidad

Los modelos que relacionan la conductividad hidráulica con la geometra del medio poroso se fundamentan en dos leyes: *i*) la ley de Darcy en la escala "macroscópica" que establece que el gasto por unidad de superficie de suelo $\mathbf{q}$, es

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{z}} \tag{2}$$

con $\mathbf{K}$ la conductividad hidráulica del suelo y $\mathbf{H}$ el potencial hidráulico. *ii*) la ley de Poiseuille en la escala "microscópica" la cual establece que la velocidad media $\mathbf{v}$ en un tubo de radio $\mathbf{R}$ es

$$\mathbf{v} = -\mathbf{C}_{\mathrm{f}}\mathbf{R}^{2}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{z}} \tag{3}$$

donde y $\mathbf{C}_{\mathbf{f}}$ son los mismos parámetros definidos en la ecuación (1). Adicionalmente, para definir el tamaño del capilar que interviene en esta última se utiliza la ley de Laplace que relaciona la presión del agua en el suelo ψ con un radio de poro, esto es

$$\mathbf{R} = -\frac{2\sigma\cos(\alpha)}{\rho_{\mathrm{w}}\mathbf{g}\psi}, \tag{4}$$

donde σ es la tensión superficial y α es el ángulo de contacto.

Utilizando el concepto de *tortuosidad* se encuentra que la velocidad rectilnea corregida es

$$\mathbf{v} = -\mathbf{C}_{\mathrm{f}}\left(\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{T}}\right)^{2}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{z}}. \tag{5}$$

Lo que muestra que la velocidad rectilnea está determinada por un radio perpendicular a la trayectoria rectilnea $\mathbf{R}_s$. De la Fig. ?? se infiere que $\mathbf{T} = \mathbf{R} / \mathbf{R}_s$, por lo que

$$\mathbf{v} = -\mathbf{C}_f \mathbf{R}_s^2 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{z}}. \tag{6}$$

Los triángulos semejantes formados por los radios y las velocidades. Al considerar el movimiento en la dirección del eje $\mathbf{z}$, únicamnete, y hacer un corte perpendicular al eje, se obtienen dos , cada una. El gasto que atraviesa en la unidad de tiempo es $\mathbf{dQ} = \mathbf{vdA}$, mientras que el gasto con respecto al área total correspondiente es $\mathbf{dq} = \mathbf{v d}\boldsymbol{\omega}$, con $\mathbf{dq} = \mathbf{dQ} / \mathbf{A}_T$ y $\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{dA} / \mathbf{A}_T$, de aqu que el flujo total será

$$\mathbf{q} = \int_\Omega \mathbf{v d}\boldsymbol{\omega} = -\mathbf{C}_f \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{z}} \int_\Omega \mathbf{R}_s^2 \mathbf{d}\boldsymbol{\omega}, \tag{7}$$

donde $\boldsymbol{\Omega}$ representa el dominio de los poros llenos con agua, $\mathbf{dA}$ una área elemental y $\mathbf{A}_T$ el área total de la sección.

El área total de poros expuestos, relativa al área total del corte perpendicular del suelo, o porosidad areal total (μ) es

$$\int_{\Omega_T} \mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = \mu, \tag{8}$$

mientras que el volumen total de los poros relativa al volumen total del suelo, o porosidad volumétrica total (ϕ), es

$$\int_{\Omega_T} \mathbf{d}\theta = \phi, \tag{9}$$

donde $\mathbf{d}\theta = \mathbf{dV} / \mathbf{V}_T$ y $\boldsymbol{\Omega}_T$ representa el dominio total de los poros. De aqu que la conductividad hidráulica

$$\mathbf{K} = -\mathbf{C}_f \int_\Omega \mathbf{R}_s^2 \mathbf{d}\boldsymbol{\omega}. \tag{10}$$

Separarndo los efectos de la conductividad hidráulica debidos a las propiedades del fluido y la geometra del suelo, introduciendo el coeficiente $\mathbf{k}$ denominado permeabilidad intrnseca, se tiene que $\mathbf{K} = \mathbf{k}$, y

$$\mathbf{k} = \mathbf{C_f} \int_{\Omega} \mathbf{R_s^2 d}\boldsymbol{\omega}. \tag{11}$$

La permeabilidad total o saturada $\mathbf{k_s}$ (el conjunto de los poros está totalmente lleno con agua), permite definir a la permeabilidad relativa $\mathbf{k_r}$ como

$$\mathbf{k_r} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{k_s}} = \frac{\int_{\Omega} \mathbf{R_s^2 d}\boldsymbol{\omega}}{\int_{\Omega_T} \mathbf{R_s^2 d}\boldsymbol{\omega}}. \tag{12}$$

La interpretación de las diferentes variables en la ecuación (12) as como la manera de integrarla, han conducido a numerosos modelos que describen la conductividad hidráulica, como se puede constatar en la literatura (e.g. Mualem [5]; Childs y Collis-George [7]; Purcell [10]; Gates y Lietz [11]; Burdine [12]; Fatt y Dykstra [13]; Marshall [14]; Wyllie y Gardner [15]; Millington y Quirk [16];).

En lo que sigue, y teniendo como marco de referencia la *geometra fractal* (Fuentes *et al.* [6] y Rieu y Sposito [8]), se analizaran las correcciones empricas introducidas desde hace medio siglo en la búsqueda desenfrenada del "mejor modelo" de predicción de la permeabilidad. Los principales modelos clásicos de la conductividad presentados en la literatura, serán deducidos a partir de las condiciones utilizadas en los modelos propuestos por Childs y Collis-George [7] y Purcell [10]-Gates y Lietz [11], los cuales representan los extremos de este modelado.

3. EL SUELO COMO UN OBJETO FRACTAL

Para explicar las correcciones empricas en los modelos clásicos de la conductividad hidráulica, se introducen algunos conceptos básicos de la geometra fractal.

Se define el tamaño $|\mathbf{U}| = \mathbf{r}$ de un subconjunto $\mathbf{U}$ no vaco de $\mathfrak{R}^{\mathbf{E}}$, donde $\mathbf{E}$ es la dimensión de Euclides (aqu $\mathbf{E} = 3$) y $\mathfrak{R}$ el conjunto de los números reales, como la distancia más grande entre un par de puntos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ en $\mathbf{U}$, i.e.: $|\mathbf{U}| = \mathbf{sup}\{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| : \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{U}\}$. Si $\{\mathbf{U_j}\}_{\mathbf{r}}$ es una colección contable (finita o infinita) de conjuntos, cuyos tamaños son inferiores o iguales a $\mathbf{r}$, que cubre un conjunto $\mathbf{F}$, *i.e.* $\mathbf{F}$ es un subconjunto de la unión de los conjuntos $\mathbf{U_j}$, con $0 < |\mathbf{U_j}| = \mathbf{r_j} \leq \mathbf{r}$, se dice que $\{\mathbf{U_j}\}$ es una $\mathbf{r}$-cubierta de $\mathbf{F}$.

Si $\mathbf{F}$ es cubierto por una colección finita de conjuntos ($\mathbf{j} = 1, 2, ..., \mathbf{N_r}$) de la misma forma y tamaño ($\mathbf{r}$), entonces la medida de Mandelbrot será [17]

$$\mathbf{H}^{\mathrm{D}} = \lim_{\mathbf{r}\to 0}\left[\mathbf{N}_{\mathbf{r}}\mathbf{r}^{\mathrm{D}}\right]. \tag{13}$$

De la continuidad de la funcion logaritmo, Mandelbrot [9] define una nueva dimension como

$$\mathbf{D} = \lim_{\mathbf{r}\to 0}\left[\frac{\log\left(\mathbf{N}_{\mathbf{r}}\right)}{\log\left(\frac{\mathbf{H}}{\mathbf{r}}\right)}\right]. \tag{14}$$

La dimension de *Mandelbrot* es fácil de calcular y se aproxima rapidamente a la de *Hausdorff-Besicovich*, que es dificil de calcular. Y se puede demostrar [17]: $\mathbf{dim}\left(\text{Hausdorff} - \text{Besicovich}\right) \leq \mathbf{dim}\left(\text{Mandelbrot}\right)$.

Considerando al suelo como un objeto fractal, el número de conjuntos cubiertas de tamaño $\mathbf{r}$ es

$$\mathbf{N}_{\mathbf{r}} = \left(\frac{\mathbf{H}}{\mathbf{r}}\right)^{\mathrm{D}}. \tag{15}$$

En la geometra euclidiana la masa es proporcional al volumen de los conjuntos cubiertas, mientras que en la geometra fractal (Mandelbrot [9]): $\mathbf{m}_{\mathbf{r}} = \mathbf{m}_{\mathrm{H}}\left(\mathbf{r}/\mathbf{H}\right)^{\mathrm{D}}$, con $\mathbf{H}$ definida por la ecuación (13), y $\mathbf{m}_{\mathrm{H}} = \rho_{\mathrm{H}}\mathbf{c}\mathbf{H}^{\mathrm{E}}$, (donde la densidad ρ_{H} corresponde a $\mathbf{r} = \mathbf{H}$). De aqu se puede establecer que cuando $\mathbf{r} \to 0$

$$\mathbf{m}_{\mathbf{r}} = \rho_{\mathrm{H}}\mathbf{c}\mathbf{H}^{\mathrm{E}}\left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{H}}\right)^{\mathrm{D}}. \tag{16}$$

Si la masa se expresa como $\mathbf{m}_{\mathbf{r}} = \rho_{\mathbf{r}}\mathbf{c}\mathbf{r}^{\mathrm{E}}$, la densidad $\rho_{\mathbf{r}}$ es

$$\rho_{\mathbf{r}} = \rho_{\mathrm{H}}\left(\frac{\mathbf{H}}{\mathbf{r}}\right)^{\mathrm{E-D}}. \tag{17}$$

De donde

$$< \rho_r >= \rho_H \left(\frac{r}{H} \right)^{2D-E} . \tag{18}$$

Por otro lado si L representa una longitud, el volumen V es proporcional a L^3 y el área A a L^2, de donde $V^{1/3}$ es proporcional a $A^{1/2}$ en la geometra de Euclides. De acuerdo con Mandelbrot [9], en la geometra fractal $V^{1/3}$ es proporcional a $A^{1/D}$, donde D es la dimensión fractal . Esta proporción es expresa de manera general

$$\mathrm{sup}_E(F) \propto \left[\mathrm{vol}_E(F) \right]^{D/E} . \tag{19}$$

Como el volumen de cada conjunto cubierta es cr^E, entonces $\mathrm{sup}_E(U) \propto r^D$. Por lo que de la ecuación (16)

$$m_E(F) \propto \mathrm{sup}_E(F). \tag{20}$$

Si se reemplaza la masa por la superficie, en las ecuaciones (16) y (18), entonces la densidad ρ_H representa el contenido de superficie en una unidad de volumen correspondiente a $r = H$.

3.1 Relación entre la dimensión fractal y la porosidad

Si $\phi_s = 1 - \phi$ representa el volumen de los sólidos relativo al volumen total de suelo, (o "solidicidad volumétrica"), entonces el área de los sólidos relativa al área total del suelo, (o "solidicidad areal"), μ_s, será igual a ϕ_s^s, con $s = D / E$. Siguiendo una idea probabilstica, hagase un corte perpendicular a la dirección macroscópica del movimiento para obtener dos secciones paralelas situadas en las posiciones x e y del eje del escurrimiento. Sobre cada sección el área de los poros es ϕ^s, ecuación (16). De donde la probabilidad total del encuentro de las secciones en un punto intermedio es el área de flujo: $\mu = \phi^s \phi^s = \phi^{2s}$. Puesto que $\phi_s + \phi = 1$ y $\mu_s + \mu = 1$ entonces

$$(1 - \phi)^s + \phi^{2s} = 1. \tag{21}$$

De donde la solidicidad areal

$$\mu_s = 1 - \mu = (1-\phi)^s = \phi_s^s, \tag{22}$$

mientras que porosidad areal

$$\mu = \phi^s \phi^s = \phi^{2s}. \tag{23}$$

A partir de la ecuación (21) se puede demostrar que $\mu \le \phi$ y que $\frac{1}{2} < \mathbf{s} < 1$, as como que la dimensión fractal de los suelos ($\mathbf{E} = 3$) satisface: $3/2 < \mathbf{D} < 3$.

Si se utiliza la ecuación (22), en la ecuación (17), la densidad de los sólidos correspondiente a $\mathbf{r}$ es

$$\rho_s(\mathbf{r}) = \rho_s \left(\frac{\mathbf{H}_s}{\mathbf{r}}\right)^{\mathbf{E}-\mathbf{D}}, \tag{24}$$

con ρ_s es la densidad total de los sólidos. Mientras que si se utiliza la ecuación (23), la densidad de los poros será

$$\rho_v(\mathbf{r}) = \rho_v \left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{H}_v}\right)^{2\mathbf{D}-\mathbf{E}}, \tag{25}$$

donde ρ_v será ahora la densidad total de los poros. Puesto que el volumen total de suelo ($\mathbf{V}_t = \mathbf{c}\mathbf{H}_t^{\mathbf{E}}$) es igual a la suma de los volúmenes totales de los sólidos ($\mathbf{V}_s = \mathbf{c}\mathbf{H}_s^{\mathbf{E}}$) y de los poros ($\mathbf{V}_v = \mathbf{c}\mathbf{H}_v^{\mathbf{E}}$), se puede establece que

$$\mathbf{H}_s^{\mathbf{E}} + \mathbf{H}_v^{\mathbf{E}} = \mathbf{H}_t^{\mathbf{E}}, \tag{26}$$

$$\phi_s = \frac{\mathbf{H}_s^{\mathbf{E}}}{\mathbf{H}_t^{\mathbf{E}}}, \tag{27}$$

$$\phi = \frac{\mathbf{H}_v^{\mathbf{E}}}{\mathbf{H}_t^{\mathbf{E}}}. \tag{28}$$

Por otro lado, la suma de la superficie total de los sólidos ($\mathbf{M}_s$) y de la superficie total de los poros ($\mathbf{M}_v$), opuesta al flujo, es igual a la superficie total del suelo ($\mathbf{M}_t$). Dada la equivalencia entre la superficie y la masa, ecuación (20): $\mathbf{M}_s = \rho_s \mathbf{c} \mathbf{H}_s^E$, $\mathbf{M}_v = \rho_v \mathbf{c} \mathbf{H}_v^E$ y $\mathbf{M}_t = \rho_t \mathbf{c} \mathbf{H}_t^E$. Las ecuaciones (26), (27) y (28) permiten establecer

$$\rho_s \left(1-\phi\right) + \rho_v \phi = \rho_t . \qquad (29)$$

La comparación de las ecuaciones (21) y (29), permiten obtener las definiciones densidades totales

$$\rho_s = \rho_t \phi_s^{s-1} = \rho_t \left(\frac{\mathbf{H}_s}{\mathbf{H}_t} \right)^{D-E} , \qquad (30)$$

$$\rho_v = \rho_t \phi_s^{2s-1} = \rho_t \left(\frac{\mathbf{H}_v}{\mathbf{H}_t} \right)^{2D-E} . \qquad (31)$$

3.2 Las porosidades parciales.

Si θ es la porosidad volumétrica parcial (o contenido volumétrico de humedad), y ω la porosidad areal parcial (o área común de flujo) correspondiente, entonces

$$\omega = \theta^{2s} \qquad \textbf{con} \qquad 0 \le \omega < \mu \qquad \textbf{y} \qquad 0 \le \theta \le \phi, \qquad (32)$$

donde

$$\omega\left(\mathbf{R}_s\right) = \int_0^{\mathbf{R}_s} \mathbf{g}\left(\mathbf{r}_s\right) \mathbf{d}\mathbf{r}_s . \qquad (33)$$

en la cual $\mathbf{g}\left(\mathbf{r}_s\right)$ es la función densidad de porosidad areal.

Brooks y Corey [18], muestran experimentalmente que la relación entre el contenido volumétrico de agua y la presión del agua, llamada curva caracterstica de humedad o curva de retención, está bien representada por una función potencia cuando la presión es pequeña, es decir: $\theta(\psi) \propto 1/|\psi|^{\lambda}$, si $\psi = 0$, y $\lambda > 0$. Considerando esto y la ley de Laplace, ecuación (4), la relación entre la porosidad volumétrica parcial y el radio es función en potencia,

$\theta(\mathbf{R}) \propto \mathbf{R}^{\lambda}$, cuando $\mathbf{R} \to 0$; la potencia es llamada 'indice de poros'. Definiendo un tamaño de poro crtico $\mathbf{R}_0$, asociado a una presión crtica en el sentido de Brooks y Corey, la porosidad volumétrica parcial en función del tamaño de poro $\mathbf{R}$ es

$$\theta(\mathbf{R}) = \phi S\left(\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{R}_0}\right), \tag{34}$$

donde la función $S(\rho) = \rho^{\lambda}$, y representa el grado de sturación en el suelo.

Ya que $\mathbf{R}$ es el radio perpendicular a la trayectoria tortuosa y $\mathbf{R}_s$ es el radio perpendicular a la trayectoria rectilnea en un punto dado, la contribución relativa a la porosidad volumétrica dada por el primero, es igual a la contribución relativa a la porosidad areal por el segundo. De aqu que la porosidad areal es

$$\omega(\mathbf{R}_s) = \mu S\left(\frac{\mathbf{R}_s}{\mathbf{R}_{s0}}\right), \tag{35}$$

donde el radio $\mathbf{R}_{s0}$ corresponde al radio $\mathbf{R}_0$.

De las ecuaciones (34), (35), (23) y (32), la relación entre $\mathbf{R}_s$ y $\mathbf{R}$ será

$$\frac{\mathbf{R}_s}{\mathbf{R}_{s0}} = \left(\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{R}_0}\right)^{\lambda}. \tag{36}$$

3.3 La semi-porosidad areal.

La porosidad areal o probabilidad en una posición $\mathbf{z}$ intermedia a las posiciones $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ está dada por $\mu = \sqrt{\mu_x}\sqrt{\mu_y}$. Se denomina a esta probabilidad una semiprobabilidad o semiporosidad areal, denotada por φ

$$\varphi = \sqrt{\mu} = \phi^{s}. \tag{37}$$

La relación entre la semiporosidad areal parcial, denotada por ϖ, y la porosidad volumétrica parcial θ es

$$\bar{\varpi} = \sqrt{\varpi} = \theta^{s} \qquad \text{con} \qquad 0 \le \bar{\varpi} \le \varphi. \tag{38}$$

La semiporosidad areal total φ satisface que

$$\int_{\Omega_T} \mathbf{d}\bar{\varpi} = \varphi. \tag{39}$$

Caracterizando las secciones situadas en los puntos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sobre la trayectoria rectilnea mediante $\left(\mathbf{r}_s, \rho_s\right)$, para los tamaños que definen la porosidad areal parcial, y por $\left(\tilde{\mathbf{r}}_s, \tilde{\rho}_s\right)$ para su raz, que definen la semiprobabilidad parcial o semiporosidad areal parcial ($\bar{\varpi}$), se obtiene que

$$\frac{\tilde{\mathbf{R}}_s}{\tilde{\mathbf{R}}_{s0}} = \sqrt{\frac{\mathbf{R}_s}{\mathbf{R}_{s0}}} = \left(\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{R}_0}\right)^{s}, \tag{40}$$

donde $\tilde{\mathbf{R}}_{s0}$ corresponde a $\mathbf{R}_{s0}$. De donde

$$\bar{\varpi}\left(\tilde{\mathbf{R}}_s\right) = \varphi \mathbf{S}\left(\tilde{\mathbf{R}}_s / \tilde{\mathbf{R}}_{s0}\right). \tag{41}$$

3.4 La tortuosidad local o capilar.

La tortuosidad local o capilar, es decir la tortuosidad en función de cada tamaño de poro ($\mathbf{r}$), se deduce de hecho de que $\mathbf{T} = \mathbf{R}_s / \mathbf{R}_{s0}$, o

$$\mathbf{T}\left(\mathbf{r}\right) = \mathbf{T}_0 \left(\frac{\mathbf{R}_0}{\mathbf{r}}\right)^{\delta} \qquad \textbf{con} \qquad 0 < \delta = 2\mathbf{s} - 1 < 1, \tag{42}$$

donde $\mathbf{T}_0 = \mathbf{R}_0 / \mathbf{R}_{s0}$.

La forma de esta última ecuación, justifica en el formalismo fractal la relación emprica de una dependencia en potencia entre la tortuosidad y el radio de los poros propuesta por Fatt y Dysktra [13]. Por otro lado, si $\mathbf{s} = 1/2$ ($\delta = 0$), $\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 = \mathbf{const.}$, resultado propuesto por Purcell para un sistema de capilares paralelos y con porosidad tendiente a cero. Para el modelo de Childs y Collis-George, aplicable a los suelos en donde la porosidad tiende a la unidad, $\mathbf{s} = 1$ ($\delta = 1$). Se debe destacar que $\mathbf{T}^{E}\left(\mathbf{r}\right)$ es inversamente proporcional a la densidad $\rho_v(\mathbf{r})$.

4. MODELOS FRACTALES DE LA CONDUCTIVIDAD HIDRÁULICA

Las semiporosidades areales parciales en los puntos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sobre la trayectoria rectilnea son representadas respectivamente por $\bar{\varpi}_x$ y $\bar{\varpi}_y$. El área de flujo en un punto intermedio es definida por

$$\mathbf{d}\varpi(\tilde{\mathbf{r}}_s,\tilde{\rho}_s)=\mathbf{d}\bar{\varpi}_x(\tilde{\mathbf{r}}_s)\mathbf{d}\bar{\varpi}_y(\tilde{\rho}_s). \tag{43}$$

La integral (11) que derermina al coeficiente de permeabilidad o permeabilidad intrnseca, toma la forma

$$\mathbf{k}=\mathbf{C}_f\int_\Omega\left[\mathbf{R}_s(\mathbf{r}_s,\rho_s)\right]^2\mathbf{d}\bar{\varpi}_x(\tilde{\mathbf{r}}_s)\mathbf{d}\bar{\varpi}_y(\tilde{\rho}_s). \tag{44}$$

donde $\tilde{\mathbf{r}}_s$ (o $\tilde{\rho}_s$) esta relacionado con $\mathbf{r}_s$ (o ρ_s) a través de la ecuación (40). Las interpretaciones del radio $\mathbf{R}_s$ que interviene en esta última expresión conducen a diferentes modelos de la permeabilidad, a saber.

4.1 Modelo del ’poro pequeño’

Utilizando la hipótesis de Childs y Collis-George [7]

$$\mathbf{R}_s=\mathbf{min}(\mathbf{r}_s,\rho_s). \tag{45}$$

La integración de (44) es

$$\mathbf{k}=\mathbf{C}_f\left[\int_{\tilde{\rho}_s=0}^{\tilde{\rho}_s=\tilde{\mathrm{R}}_s}\int_{\tilde{\mathrm{r}}_s=0}^{\tilde{\mathrm{r}}_s=\tilde{\rho}_s}\mathbf{r}_s^2\mathbf{d}\bar{\varpi}_x(\tilde{\mathbf{r}}_s)\mathbf{d}\bar{\varpi}_y(\tilde{\rho}_s)+\int_{\rho_s=0}^{\tilde{\rho}_s=\tilde{\mathrm{R}}_s}\int_{\tilde{\mathrm{r}}_s=\tilde{\rho}_s}^{\tilde{\mathrm{r}}_s=\tilde{\mathrm{R}}_s}\rho_s^2\mathbf{d}\bar{\varpi}_x(\tilde{\mathbf{r}}_s)\mathbf{d}\bar{\varpi}_y(\tilde{\rho}_s)\right]. \tag{46}$$

Para un suelo homogéneo ($\bar{\varpi}_x=\bar{\varpi}_y=\bar{\varpi}$), las integrales son iguales por lo que

$$\mathbf{k}=2\mathbf{C}_f\int_0^{\tilde{\mathrm{R}}_s}\left[\bar{\varpi}(\tilde{\mathbf{R}}_s)-\bar{\varpi}(\tilde{\mathbf{r}}_s)\right]\mathbf{r}_s^2\mathbf{d}\bar{\varpi}(\tilde{\mathbf{r}}_s). \tag{47}$$

4.2 Modelo de la media geométrica

La hipótesis de Mualem [5], asume que el radio volumétrico $\mathbf{R}$ es la media geométrica de $\mathbf{r}$ y ρ, de donde

$$\mathbf{R}_s^2 = \mathbf{r}_s \rho_s . \tag{48}$$

Lo que hace que la ecuación (44) se entonces

$$\mathbf{k} = \mathbf{C}_f \int_0^{\tilde{\mathbf{R}}_s} \mathbf{r}_s \mathbf{d}\bar{\varpi}_x\left(\tilde{\mathbf{r}}_s\right) \int_0^{\tilde{\mathbf{R}}_s} \rho_s \mathbf{d}\bar{\varpi}_y\left(\tilde{\rho}_s\right). \tag{49}$$

Y para suelo homogéneo ($\bar{\varpi}_x = \bar{\varpi}_y = \bar{\varpi}$)

$$\mathbf{k} = \mathbf{C}_f \left[\int_0^{\tilde{\mathbf{R}}_s} \mathbf{r}_s \mathbf{d}\bar{\varpi}\left(\tilde{\mathbf{r}}_s\right) \right]^2 . \tag{50}$$

4.3 Modelo del ’poro neutro’

Cuando se considera que no hay preferencia por los radios

$$\mathbf{R}_s = \mathbf{r}_s \qquad \mathbf{o} \qquad \mathbf{R}_s = \rho_s , \tag{51}$$

se obtiene para la ecuación (44)

$$\mathbf{k} = \mathbf{C}_f \bar{\varpi}_x\left(\tilde{\mathbf{R}}_s\right) \int_0^{\tilde{\mathbf{R}}_s} \rho_s^2 \mathbf{d}\bar{\varpi}_y\left(\tilde{\rho}_s\right) = \mathbf{C}_f \bar{\varpi}_y\left(\tilde{\mathbf{R}}_s\right) \int_0^{\tilde{\mathbf{R}}_s} \mathbf{r}_s^2 \mathbf{d}\bar{\varpi}_x\left(\tilde{\mathbf{r}}_s\right). \tag{52}$$

Si el suelo es homogéneo

$$\mathbf{k} = \mathbf{C_f}\varpi\left(\tilde{\mathbf{R}}_s\right)\int_0^{\tilde{\mathbf{R}}_s}\mathbf{r}_s^2\mathbf{d}\varpi\left(\tilde{\mathbf{r}}_s\right). \tag{53}$$

4.4 Modelo del ’poro grande’

Finalmente, considerando que el poro de radio más grande determina la resistencia al flujo

$$\mathbf{R_s} = \rho_s \qquad \mathbf{si} \qquad \mathbf{r_s} < \rho_s, \tag{54}$$

o

$$\mathbf{R_s} = \mathbf{r_s} \qquad \mathbf{si} \qquad \rho_s < \mathbf{r_s},$$

es decir $\mathbf{R_s} = \mathbf{max}\left(\mathbf{r_s}, \rho_s\right)$, la ecuación (44) conduce a

$$\mathbf{k} = \mathbf{C_f}\left[\int_{\tilde{\mathbf{r}}_s=0}^{\tilde{\mathbf{r}}_s=\tilde{\mathbf{R}}_s}\int_{\tilde{\rho}_s=0}^{\tilde{\rho}_s=\tilde{\mathbf{r}}_s}\mathbf{r}_s^2\mathbf{d}\bar{\varpi}_x\left(\tilde{\mathbf{r}}_s\right)\mathbf{d}\bar{\varpi}_y\left(\tilde{\rho}_s\right) + \int_{\tilde{\rho}_s=0}^{\tilde{\rho}_s=\tilde{\mathbf{R}}_s}\int_{\tilde{\mathbf{r}}_s=0}^{\tilde{\mathbf{r}}_s=\tilde{\rho}_s}\rho_s^2\mathbf{d}\bar{\varpi}_x\left(\tilde{\mathbf{r}}_s\right)\mathbf{d}\bar{\varpi}_y\left(\tilde{\rho}_s\right)\right]. \tag{55}$$

y realizando la primera integral

$$\mathbf{k} = \mathbf{C_f}\left[\int_0^{\tilde{\mathbf{R}}_s}\mathbf{r}_s^2\mathbf{d}\bar{\varpi}_y\left(\tilde{\mathbf{r}}_s\right)\mathbf{d}\bar{\varpi}_x\left(\tilde{\mathbf{r}}_s\right) + \int_0^{\tilde{\mathbf{R}}_s}\rho_s^2\mathbf{d}\bar{\varpi}_x\left(\tilde{\rho}_s\right)\mathbf{d}\bar{\varpi}_y\left(\tilde{\rho}_s\right)\right]. \tag{56}$$

Para el suelo homogéneo

$$\mathbf{k} = 2\mathbf{C_f}\int_0^{\tilde{\mathbf{R}}_s}\mathbf{r}_s^2\bar{\varpi}\left(\tilde{\mathbf{r}}_s\right)\mathbf{d}\bar{\varpi}\left(\tilde{\mathbf{r}}_s\right). \tag{57}$$

4.5 Modelos de la conductividad.

Dado que la conductividad de cada poro capilar es

$$\mathbf{K}_C(\mathbf{r}) = \mathbf{K}_{C0}\left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{R}_0}\right)^{4s}, \tag{58}$$

con

$$\mathbf{K}_{C0} = \frac{\rho_w \mathbf{g}}{\eta}\mathbf{C}_f\mathbf{R}_{S0}^2 = \frac{\rho_w \mathbf{g}}{\eta}\mathbf{C}_f\frac{\mathbf{R}_0^2}{\mathbf{T}_0^2}, \tag{59}$$

y $\mathbf{K}_{C0}$ es la conductividad del poro de radio $\mathbf{R}_0$. Ahora bien, introduciendo el grado efectivo de saturación

$$\Theta = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \tag{60}$$

donde θ_s es el contenido de humedad a saturación asimilado generalmente a la porosidad total ϕ, θ_r es el contenido de humedad residual definido de modo que la succión del agua es muy grande o que la presión del agua es muy pequeña ($\Psi \to -\infty$); los modelos de la conductividad hidráulica correspondientes a las hipótesis de poro pequeño, poro de media geométrica, poro neutro y poro grande son respectivamente

$$\mathbf{K}(\mathbf{R}) = 2\phi_{ef}^{2s}\int_0^{\mathbf{R}}\left[\Theta_s(\mathbf{R}) - \Theta_s(\mathbf{r})\right]\mathbf{K}_C(\mathbf{r})\,\mathbf{d}\Theta_s(\mathbf{r}); \qquad \mathbf{K}_C = \frac{1}{2\phi_{ef}^{2s}}\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\Theta_s}\left(\frac{\mathbf{dK}}{\mathbf{d}\Theta_s}\right); \tag{61}$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{R}) = \phi_{ef}^{2s}\left[\int_0^{\mathbf{R}}\sqrt{\mathbf{K}_C(\mathbf{r})}\,\mathbf{d}\Theta_s(\mathbf{r})\right]^2; \qquad \mathbf{K}_C = \frac{1}{4\phi_{ef}^{2s}\mathbf{K}}\left(\frac{\mathbf{dK}}{\mathbf{d}\Theta_s}\right)^2; \tag{62}$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{R}) = \phi_{ef}^{2s}\Theta_s(\mathbf{R})\int_0^{\mathbf{R}}\mathbf{K}_C(\mathbf{r})\,\mathbf{d}\Theta_s(\mathbf{r}); \qquad \mathbf{K}_C = \frac{1}{\phi_{ef}^{2s}}\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\Theta_s}\left(\frac{\mathbf{K}}{\Theta_s}\right); \tag{63}$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{R}) = 2\phi_{ef}^{2s}\int_0^{\mathbf{R}}\mathbf{K}_C(\mathbf{r})\Theta_s(\mathbf{r})\,\mathbf{d}\Theta_s(\mathbf{r}); \qquad \mathbf{K}_C = \frac{1}{2\phi_{ef}^{2s}\Theta_s}\frac{\mathbf{dK}}{\mathbf{d}\Theta_s}. \tag{64}$$

Para calcular estas integrales se deben proporcionar: i) la curva de retención de humedad y una relación entre los radios de poros y de curvatura, ii) la variación de la conductividad capilar con respecto al contenido de humedad o la dependencia de ésta con respecto al radio de poro.

Si se asume que el ángulo de contacto es independiente del tamaño de poro, (los radios de poro y de curvatura son iguales o proporcionales en cada poro capilar), la ecuación (58) será

$$\mathbf{K}_C(\mathbf{r}) = \mathbf{K}_{C0}\left[\frac{\boldsymbol{\Psi}_0}{\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r})}\right]^{4\mathbf{s}}, \tag{65}$$

donde $\boldsymbol{\Psi}_0$ es la presión asociada a $\mathbf{R}_0$.

Los modelos resultantes al considerar la ecuación anterior, que requieren la curva de retención $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\Theta})$, son:

El modelo del ’poro pequeño’

$$\frac{\mathbf{K}(\boldsymbol{\Theta})}{\mathbf{K}_s} = \frac{\displaystyle\int_0^{\Theta} \frac{\boldsymbol{\Theta}^s - \tilde{\boldsymbol{\Theta}}^s}{\left|\psi(\tilde{\boldsymbol{\Theta}})\right|^{4s}}\, \tilde{\boldsymbol{\Theta}}^{s-1} \mathbf{d}\tilde{\boldsymbol{\Theta}}}{\displaystyle\int_0^{1} \frac{\boldsymbol{\Theta}^s - \tilde{\boldsymbol{\Theta}}^s}{\left|\psi(\tilde{\boldsymbol{\Theta}})\right|^{4s}}\, \tilde{\boldsymbol{\Theta}}^{s-1} \mathbf{d}\tilde{\boldsymbol{\Theta}}}. \tag{66}$$

El modelo de la ’media geométrica’

$$\frac{\mathbf{K}(\boldsymbol{\Theta})}{\mathbf{K}_s} = \left[\frac{\displaystyle\int_0^{\Theta} \frac{\tilde{\boldsymbol{\Theta}}^{s-1} \mathbf{d}\tilde{\boldsymbol{\Theta}}}{\left|\psi(\tilde{\boldsymbol{\Theta}})\right|^{2s}}}{\displaystyle\int_0^{1} \frac{\tilde{\boldsymbol{\Theta}}^{s-1} \mathbf{d}\tilde{\boldsymbol{\Theta}}}{\left|\psi(\tilde{\boldsymbol{\Theta}})\right|^{2s}}}\right]^2. \tag{67}$$

El modelo del ’poro neutro’

$$\frac{\mathbf{K}(\boldsymbol{\Theta})}{\mathbf{K}_s} = \boldsymbol{\Theta}^s \left[\frac{\displaystyle\int_0^{\Theta} \frac{\tilde{\boldsymbol{\Theta}}^{s-1} \mathbf{d}\tilde{\boldsymbol{\Theta}}}{\left|\psi(\tilde{\boldsymbol{\Theta}})\right|^{4s}}}{\displaystyle\int_0^{1} \frac{\tilde{\boldsymbol{\Theta}}^{s-1} \mathbf{d}\tilde{\boldsymbol{\Theta}}}{\left|\psi(\tilde{\boldsymbol{\Theta}})\right|^{4s}}}\right]. \tag{68}$$

El modelo del ’poro grande’

$$\frac{K(\Theta)}{K_s}=\frac{\displaystyle\int_0^{\Theta}\frac{\tilde{\Theta}^{2s-1}}{\left|\psi\left(\tilde{\Theta}\right)\right|^{4s}}d\tilde{\Theta}}{\displaystyle\int_0^{1}\frac{\tilde{\Theta}^{2s-1}}{\left|\psi\left(\tilde{\Theta}\right)\right|^{4s}}d\tilde{\Theta}}. \tag{69}$$

Si se proporciona la función $K_C(\Theta)$, la integración de los cuatro modelos, ecuaciones (61)- (64), proporcionará los modelos respectivos de la conductividad hidráulica.

5. LOS MODELOS CLÁSICOS DENTRO DE LA GEOMETRA FRACTAL

Para obtener la estructura de los modelos clásicos observese que la porosidad areal dada por la ecuación (45) puede ser expresada en función de los radios volumétricos (r,ρ), es decir: $d\omega(r,\rho)=s^2\theta^{s-1}(r)\theta^{s-1}(\rho)d\theta(r)d\theta(\rho)$. Bajo la hipótesis de que la función multiplicativa de las diferenciales de $\theta(r)$ y $\theta(\rho)$, puede ser reemplazada por una media que depende sólo del lmite superior, es decir de R, se obtiene

$$d\omega(r,\rho;R)=\theta^{2s-2}(R)d\theta(r)d\theta(\rho)=\theta^{2s-2}(R)f(r)f(\rho)drd\rho, \tag{70}$$

en donde se ha eliminado el término s^2 para satisfacer las ecuaciones (8) y (32), a saber

$$\int_0^R\int_0^R d\omega(r,\rho;R)=\omega=\theta^{2s}. \tag{71}$$

La hipótesis compatible con la anterior es que la tortuosidad es una función solamente del radio mayor, (solamente de la humedad). y es el resultado de la combinación de las ecuaciones (34) y (42)

$$T(R)=T_0\left[\frac{\phi}{\theta(R)}\right]^{\gamma}, \tag{72}$$

donde $\gamma=\delta/\lambda$. En varios trabajos reportados en la literatura (*e.g.* Rieu y Sposito [8]) se ha sugerido que la porosidad volumétrica parcial es proporcional al volumen del cuerpo paralelo, es decir: $\theta(\mathbf{R}) \propto \mathbf{R}^{\mathbf{E}-\mathbf{D}}$; de donde

$$\lambda = \mathbf{E} - \mathbf{D} = \mathbf{E}(1 - \mathbf{s}). \tag{73}$$

Puesto que $\mathbf{T}(\theta) = \mathbf{R}(\mathbf{r}, \rho) / \mathbf{R}_s(\mathbf{r}, \rho; \theta)$. La ecuación (72) conduce a

$$\mathbf{R}_s(\mathbf{r}, \rho; \theta) = \frac{1}{\mathbf{T}_0}\left[\frac{\theta}{\phi}\right]^{\gamma} \mathbf{R}(\mathbf{r}, \rho). \tag{74}$$

La introducción de las ecuaciones (70) y (74) en la ecuación (11) permite expresar la permeabilidad de la manera siguiente

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{C}_f}{\mathbf{T}_0^2}\phi^{2s-2}\left[\frac{\theta}{\phi}\right]^{p} \int_{\Omega}\left[\mathbf{R}(\mathbf{r}, \rho)\right]^2 \mathbf{d}\theta(\mathbf{r})\mathbf{d}\theta(\rho), \tag{75}$$

donde

$$\mathbf{p} = (2\mathbf{s} - 2) + (2\gamma), \tag{76}$$

en esta potencia, el primer sumando representa los efectos globales de la correlación de los poros, mientras que el segundo representa los efectos globales debidos a la tortuosidad de las trayectorias de flujo.

La conductividad de cada poro capilar, al introducir el contenido de humedad residual es

$$\mathbf{K}_C(\mathbf{r}) = \mathbf{K}_{C0}\left[\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{R}_0}\right]^2, \tag{77}$$

donde $\mathbf{K}_{C0}$ definida por la ecuación (59).

Los modelos clásicos de conductividad hidráulica, en el contexto de la geometra fractal, que resultan al introducir las hipótesis sobre los radios que definen el volumen de los poros, correspondientes al poro pequeño, poro geométrico, poro neutral y poro grande, son respectivamente

$$\mathbf{K}(\mathbf{R}) = 2\phi_{ef}^{2s}\Theta^{p}(\mathbf{R})\int_0^{\mathbf{R}}\left[\Theta(\mathbf{R}) - \Theta(\mathbf{r})\right]\mathbf{K}_C(\mathbf{r})\,\mathbf{d}\Theta(\mathbf{r}), \tag{78}$$

$$K(R)=\phi_{ef}^{2s}\Theta^{p}(R)\left[\int_{0}^{R}\sqrt{K_C(r)}\,d\Theta(r)\right]^{2}, \tag{79}$$

$$K(R)=\phi_{ef}^{2s}\Theta^{1+p}(R)\int_{0}^{R}K_C(r)\,d\Theta(r), \tag{80}$$

$$K(R)=2\phi_{ef}^{2s}\Theta^{p}(R)\int_{0}^{R}K_C(r)\,\Theta(r)\,d\Theta(r). \tag{81}$$

Los modelos propuestos en la literatura para estimar la conductividad hidráulica relativa se deducen de las ecuaciones (78), (79), (80) y (81), asumiendo que el radio de poro es igua al radio de curvatura de la ley de Laplace; de donde:

El modelo de Childs y Collis-George [7] generalizado

$$\frac{K(\Theta)}{K_s}=\Theta^{p}\frac{\displaystyle\int_{0}^{\Theta}\frac{\Theta-\tilde{\Theta}}{\psi^{2}(\tilde{\Theta})}d\tilde{\Theta}}{\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{1-\tilde{\Theta}}{\psi^{2}(\tilde{\Theta})}d\tilde{\Theta}}. \tag{82}$$

El modelo de Mualem [5] generalizado

$$\frac{K(\Theta)}{K_s}=\Theta^{p}\left[\frac{\displaystyle\int_{0}^{\Theta}\frac{d\tilde{\Theta}}{\psi(\tilde{\Theta})}}{\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{d\tilde{\Theta}}{\psi(\tilde{\Theta})}}\right]^{2}. \tag{83}$$

El modelo de Burdine [12] generalizado

$$\frac{K(\Theta)}{K_s}=\Theta^{p+1}\frac{\displaystyle\int_{0}^{\Theta}\frac{d\tilde{\Theta}}{\psi^{2}(\tilde{\Theta})}}{\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{d\tilde{\Theta}}{\psi^{2}(\tilde{\Theta})}}. \tag{84}$$

El modelo de Fuentes [6]

$$\frac{K(\Theta)}{K_s} = \Theta^p \frac{\int_0^{\Theta} \frac{\tilde{\Theta}}{\psi^2(\tilde{\Theta})} d\tilde{\Theta}}{\int_0^{1} \frac{\tilde{\Theta}}{\psi^2(\tilde{\Theta})} d\tilde{\Theta}}. \tag{85}$$

La potencia de la ecuación (76), considerando la ecuación (72), y la aproximación $\lambda = 3(1-s)$, es

$$p = p_1 + p_2, p_1 = 2s - 2, \text{ y } p_2 = \frac{2(2s-1)}{3(1-s)}. \tag{86}$$

La potencia p que aparece en las ecuaciones (82)-(85), se ha considerado clásicamente como un parámetro emprico. La teora expuesta en este trabajo ha permitido su justifación en el contexto de la geometra fractal. Esta potencia es el resultado de los efectos de correlación entre poros (p_1) y de la tortuosidad (p_2) [ecuación (86)]. En la Tabla 1 se muestran los valores extremos de estas potencias correspondientes a los valores extremos de la porosidad volumétrica total.

Table 1: La potencia p de corrección de los modelos de la conductividad hidráulica, que resulta de los efectos de la correlación de los poros (p_1) y del factor de tortuosidad (p_2), de acuerdo con la ecuación (86), para algunos valores de la porosidad volumétrica total.

ϕ	$s = D/3$	p_1	p_2	$p = p_1 + p_2$
0	$1/2$	-1	0	-1
0.3671	$2/3$	$-2/3$	$2/3$	0
$1/2$	0.6942	-0.6115	0.8470	0.2355
0.6180	0.7202	-0.5596	1.0494	0.4898
1	1	0	∞	∞

Con el fin de contrastar la bondad de la teora desarrollada se presentan las gráficas correspondientes a la curva caracterstica de humedad, con la cual se ajustan los parámetros de los modelos, y con ellos se obtiene la curva de conductividad hidráulica, que se contrasta con los datos reales de un suelos (los datos medidos, se toman de la base Grizzly). El proceso se realiza para los modelos de poro grande, poro geométrico y poro neutro. En cada una de ellas se proporcional los principales parámetros de los suelos.

5.1 Hygiene Sandstone 13

Parámetros: $\rho_s = 2.65 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$; $\rho_t = 1.80 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$; $\phi = 0.32 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$.

Para el poro geométrico véanse las figuras ?? y ??, para las curvas caracterstica de humedad y de conductividad hidráulica, respectivamente.

Para el poro neutro véanse las figuras ?? y ??, para las curvas caracterstica de humedad y de conductividad hidráulica, respectivamente.

Para el poro grande véanse las figuras ?? y ??, para las curvas caracterstica de humedad y de conductividad hidráulica, respectivamente.

Curva caracterstica de humedad, para el suelo Hygiene Sandstone 13, mediante el modelos de poro geométrico: d datos experimentales, la lnea continua es la predicción teórica. $\theta_s = 0.25$; $\theta_r = 0.153$; $\mathbf{s} : 0.642$; $\mathbf{m} = 1.3176$; $\psi_d = -146.71$.

Curva de conductividad hidráulica, para el suelo Hygiene Sandstone 13, mediante el modelos de poro geométrico: d datos experimentales, la lnea continua es la predicción teórica. $\theta_s = 0.25$; $\theta_r = 0.153$; $\mathbf{s} : 0.642$; $\mathbf{m} = 1.3176$; $\psi_d = -146.71$.

Curva caracterstica de humedad, para el suelo Hygiene Sandstone 13, mediante el modelos de poro neutro: d datos experimentales, la lnea continua es la predicción teórica. $\theta_s = 0.25$; $\theta_r = 0.153$; $\mathbf{s} : 0.642$; $\mathbf{m} = 1.102$; $\psi_d = -142.23$.

Curva de conductividad hidráulica, para el suelo Hygiene Sandstone 13, mediante el modelos de poro neutro: d datos experimentales, la lnea continua es la predicción teórica. $\theta_s = 0.25$; $\theta_r = 0.153$; $\mathbf{s} : 0.642$; $\mathbf{m} = 1.102$; $\psi_d = -142.23$

Curva caracterstica de humedad, para el suelo Hygiene Sandstone, mediante el modelos de poro grande: d datos experimentales, la lnea continua es la predicción teórica. $\theta_s = 0.25$; $\theta_r = 0.153$; $\mathbf{s} : 0.642$; $\mathbf{m} = 0.6$; $\psi_d = -129.61$. Curva de conductividad hidráulica, para el suelo Hygiene Sandstone 13, mediante el modelos de poro grande: d datos experimentales, la lnea continua es la predicción teórica. $\theta_s = 0.25$; $\theta_r = 0.153$; $\mathbf{s} : 0.642$; $\mathbf{m} = 0.6$; $\psi_d = -129.61$.

6. CONCLUSIONES

La aplicación de los conceptos de penetración capilar en el medio poroso, partiendo de la idea probabilista de Childs y Collis-George [7] y de los conceptos de la geometra fractal (relación entre el área y el volumen de Mandelbrot [17, 9]), han permitido a Fuentes y sus colaboradores [6], establecer una definición del área efectiva de flujo y con ello la conformación de cuatro modelos conceptuales para la conductividad hidráulica, a saber: modelo de poro grande, de poro pequeño, de poro neutral y de media geométrica. Dichos modelos dan explicación formal a las correcciones empricas introducidas desde hace medio siglo en la búsqueda del "mejor modelo" de predicción de la permeabilidad hidráulica y que dan origen a los denominados modelos clásicos de la conductividad en la literatura [10, 11, 7, 12, 13, 16, 5]. Finalmente, la introducción de los modelos conceptuales desarrollados por Fuentes dentro del formalismo de estudio propuesto por van Genuchtec [19], para estimar la conductividad hidráulica a partir de la curva de retención, permite obtener formas cerradas de la conductividad hidráulica, las cuales predicen con muy buenos resultados los resultados obtenidos experimentalmente en el estudio de la infiltración de agua en los suelos.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1]N. K. Adam, Principles of penetration of liquids into solids, Discuss. Faraday Soc. No. **3** (1948) 5.

[2]Melrose, J. C., Wettability as related to capillary action in porous media, Soc. Pet. Eng. J. **5** (1965) 259.

[3]D. H. Everett, J. Colloid Interface Sci. **52** (1975)189.

[4]A. Marmur, Penetration of a small drop into a capillary, J. Colloid Interface Sci. **122** (1988) 209.

[5]Y. Mualem, y G. Dagan, Hydraulic conductivity of soils: unified approach to the statistical models, Soil Sci. Soc. Am. J. **42** (1978) 392.C. Fuentes, M. Vauclin, J.-Y. Parlange y R. Haverkamp, Soil-water conductivity of a fractal soil, Fractals in Soil Science, editado por Ph. Baveye, J.-Y. Parlange y B.A. Stewart. CRC press, Boca Raton 333 (1998).

[6]E. C. Childs y N. Collis-George, The permeability of porous materials, Proc. Roy. Soc., Ser. A **201** (1950) 392.

[7]M. Rieu, y G. Sposito, Fractal fragmentation, soil porosity, and soil water properties: I. Theory, Soil Sci. Soc. Am. J. **55** (1991) 1231.

[8] B. B. Mandelbrot, The fractal geometry of nature, Freeman, San Francisco (1983).

[9]W. R. Purcell, Capillary pressures- their measurement using mercury and the calculation of permeability thereform, Petr. Trans. Amer. Inst. Mining Metallurgical Engrs. **186** (1949) 39.

[10] J. I. Gates y W. T. Lietz, Relative permeabilities of California cores by the capillary-pressure method, Drilling and Production Practique, Amer. Petrol. Inst. **1 (**1950) 285.

[11] N. T. Burdine, Relative permeability calculation from size distribution data, Trans. AIME, **198** (1953) 71.

[12] I, Fatt, H. Dykstra, Relative permeability studies, Trans Am. Inst. Min. Eng. **192** (1951) 249.

[13] T. J. Marshall, A relation between permeability and size distribution of pores, Soil Sci. **9** (1958) 1.
[14] M. R. J. Wyllie, y G. H. F. Gardner, The generalized Koseny-Carman equation, World Oil (Houston, Tex.), **March-April** (1958) 210.
[15] R. J. Millington, y J. P. Quirk, Permeability of porous solids, Trans. Faraday Soc. **57** (1961) 1200.
[16] K. Falconer, Fractal geometry, mathematical foundations and applications, John Wiley & Sons, England (1990).
[17] R. H. Brooks y A. T. Corey, Hydraulic properties of porous media, Hydrol. Pap., Colo. State Univ. **3** (1964) 45.
[18] M.Th. Van Genuchten, A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils, Soil Sci. Soc. Am. J. **44** (1980) 892.